数理解析研究所講究録
229巻 1975年 47-62

Fuzzy-Fuzzyオートマトン

水本雅晴　　田中幸吉
(大阪大学・基礎工学部・情報工学科)

1965年，L.A.Zadehによりあいまいな事柄を表現する手法としてfuzzy集合の概念が発表されて以来[1]，オートマトン，言語，制御，パターン認識，意志決定，論理などの分野に応用されている．たとえば，fuzzyオートマトンについていえば，Wee[2]によって学習オートマトンとして定式化されたのが最初で，その後fuzzyオートマトンによる多峰点探索，プラント制御，ランダム媒体との相互作用，ゲーム，fuzzyプログラム，GMDHアルゴリズムなどに応用されている．これらと並行に，fuzzyオートマトンそのものに対する性質も調べられており，[3][4][5] またfuzzyオートマトンの変形または拡張として，マックス・積オートマトン，ミニ・マックスオートマトン，L-fuzzyオートマトンなど種々のオートマトンが定式化されている．[6][7]

本稿では，fuzzy集合の拡張であるfuzzy-fuzzy集合の性質を述べ，これを基にfuzzy-fuzzyオートマトンを新しく定義し，2，3の性質を導き出す．

1. Fuzzy-Fuzzy集合

準備として通常のfuzzy集合について簡単に述べておこう．集合Xにおける<u>fuzzy集合</u>Aとは

$$\mu_A : X \to [0,1] \qquad (1)$$

なる<u>メンバーシップ関数</u>μ_Aによって特性づけられた集合で，値$\mu_A(x) \in [0,1]$は要素$x \in X$がfuzzy集合Aに属する<u>グレード</u>を表わす．fuzzy集合の表記法として

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n$$
$$= \sum_i \mu_A(x_i)/x_i \qquad (2)$$

を採用する。ここで，$+$は論理和(max)を表わす．

fuzzy集合に関する演算としては

<u>包含</u>：　$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leqq \mu_B(x), \ ^\forall x \in X.$　(3)

<u>和</u>　：　$A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)].$　(4)

<u>交わり</u>：$A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A\cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)].$　(5)

<u>補集合</u>：　$\bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$　(6)

正規fuzzy集合，凸fuzzy集合が以下の様に定義される．

<u>正規fuzzy集合</u>：fuzzy集合Aが<u>正規</u>であるとは

$$\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1 \qquad (7)$$

を満たす場合をいう．

<u>凸fuzzy集合</u>：$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$（ただし，$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$で，$x_i$は実数とする）におけるfuzzy集合Aが<u>凸</u>であるとは任意の$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$に対して

$$\mu_A(x_i) \geqq \min[\mu_A(x_k), \mu_A(x_l)] \qquad (7)$$

を満たす場合をいう．ここで，$k \leqq i \leqq l$である．

（例）次のfuzzy集合Aは正規凸fuzzy集合である．

$$A = 0.3/1 + 0.6/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.2/5 .$$

さて，上述のfuzzy集合においてはグレードは区間$[0, 1]$内の値を取るものであったが（たとえば，$\mu_A(x) = 0.8$など），現実にはグレードそのものがはっきり定まらなくて，たとえば，グレードは"高い"，"中位い"，"非常に低い"，"0.8ぐらい"といったことがある．このようなことを説明するためにグレードが$[0, 1]$上のfuzzy集合で表わされるようなfuzzy-fuzzy集合（またはタイプ2のfuzzy集合）がZadehにより提案された[8]．

<u>Fuzzy-Fuzzy集合</u>：集合Xにおける<u>fuzzy-fuzzy集合</u>Aとは

$$\mu_A : X \to [0, 1]^{[0, 1]} \qquad (8)$$

なる<u>fuzzyメンバーシップ関数</u> μ_A によって特性づけられたfuzzy集合で，値 $\mu_A(x)$ は<u>fuzzyグレード</u>と名付けられ，[0, 1]（またはその部分集合）におけるfuzzy集合である．

Fuzzy-fuzzy集合の演算は拡張原理† を使用することにより以下の様に与えられる．

fuzzyグレード $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ を

$$\mu_A(x) = \sum_i \alpha_i/u_i, \quad \mu_B(x) = \sum_j \beta_j/v_j \qquad (9)$$

と表わす．ここで，α_i, β_j はそれぞれ $u_i, v_j \in [0, 1]$ に対するグレードである．$\vee = \max$, $\wedge = \min$ とみなすと

<u>和</u>：$A \vee B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

$$= (\sum_i \alpha_i/u_i) \vee (\sum_j \beta_j/v_j)$$
$$= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j)/(u_i \vee v_j). \qquad (10)$$

<u>交わり</u>：$A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

$$= \sum_{i,j} (\alpha_i \wedge \beta_j)/(u_i \wedge v_j). \qquad (11)$$

<u>補集合</u>：$\bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = \neg \mu_A(x)$

$$= \sum_i \alpha_i/(1 - u_i). \qquad (12)$$

---

† $A = \sum_i \mu_A(x_i)/x_i$, $B = \sum_j \mu_B(y_j)/y_j$ をXにおけるfuzzy集合とすると，Xの要素に対する2項演算 $*$ はfuzzy集合A, Bに拡張定義され，以下の様に与えられる（拡張原理）．

$$A * B = (\sum_i \mu_A(x_i)/x_i) * (\sum_j \mu_B(y_j)/y_j)$$
$$= \sum_{i,j} (\mu_A(x_i) \wedge \mu_B(y_j))/(x_i * y_j), \quad \wedge = \min.$$

（例） $J=\{0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1\} \subseteq [0,1]$ とし

$$\mu_A(x) = \underline{high} = 0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1$$

$$\mu_B(x) = \underline{low} = 1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3$$

とすると，$\mu_A(x) \vee \mu_B(x) =$

$$(0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1) \vee (1/0 + 0.9/0.1 + 0.7/0.2 + 0.4/0.3)$$

$$= 0.4/0.7 + 0.7/0.8 + 0.9/0.9 + 1/1 = \underline{high};$$

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \underline{low}; \quad \mu_{\bar{A}}(x) = \neg\,\underline{high} = \underline{low}.$$

［性質１］任意の fuzzy グレードは演算 $\vee$，$\wedge$，$\neg$ に関して①巾等律；②交換律；③結合律；④二重否定の法則；⑤ド・モルガンの法則などが成立するが，一般に吸収律；分配律；定数演算の法則；相補律は不成立となる．ただし，定数演算のうち　$\mu_A(x) \vee 0 = \mu_A(x)$，$\mu_A(x) \wedge 1 = \mu_A(x)$ は成立する．

（例） $\mu_A(x) = 0.3/0 + 0.4/0.2 + 0.6/0.4 + 0.8/0.6 + 0.9/0.8$，

$$\mu_B(x) = 0.1/0 + 0.2/0.2 + 0.3/0.4 + 0.4/0.5 + 0.5/0.8,$$

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))$$

$$= 0.3/0 + 0.4/0.2 + 0.5/0.4 + 0.5/0.6 + 0.5/0.8$$

$\neq \mu_A(x)$．（吸収律の不成立）．

（例） $\mu_A(x) = 0.9/0.1 + 0.2/0.2 + 0.1/0.3 + 0.8/0.4$

$$\mu_B(x) = 0.4/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.3/0.4$$

$$\mu_C(x) = 0.2/0.1 + 0.3/0.2 + 0.6/0.3 + 0.8/0.4$$

とすると

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x))$$
$$= 0.6/0.1 + 0.3/0.2 + 0.6/0.3 + 0.6/0.4,$$
$$(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x))$$
$$= 0.6/0.1 + 0.5/0.2 + 0.6/0.3 + 0.6/0.4$$

となり分配律は成立していない．

（例） $\mu_A(x) = 0.7/0.1 + 0.5/0.2 + 0.8/0.3$

とすると

$$\mu_A(x) \vee 1 = 0.8/1 \neq 1/1 \ (=1),$$
$$\mu_A(x) \wedge 0 = 0.8/0 \neq 1/0 \ (=0),$$

となり定数演算の法則（一部分）は成立していない．

（例） $\mu_A(x) = 0.8/0.1 + 1/0.2 + 0.5/0.3$

とすると，$\neg\mu_A(x) = 0.8/0.9 + 1/0.8 + 0.5/0.7$

となる． $\mu_A(x) \vee (\neg\mu_A(x)) = 0.8/0.9 + 1/0.8 + 0.5/0.7 \neq 1/1 \ (=1)$

$\mu_A(x) \wedge (\neg\mu_A(x)) = 0.8/0.1 + 1/0.2 + 0.5/0.3 \neq 1/0 \ (=0)$

より相補律は不成立となる．

《定理1》 fuzzyグレードに対する順序関係 $\preceq$ を

$$\mu_A(x) \preceq \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x)$$

と定義すれば，$\preceq$ の下で半順序集合をなす．同様に $\leqq$ を

$$\mu_A(x) \leqq \mu_B(x) \Leftrightarrow \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \mu_B(x)$$

と定義すれば，$\leqq$ の下で半順序集合をなす．一般に $\leqq \neq \preceq$．

[性質2] $\mu_A(x), \mu_B(x)$ を凸fuzzyグレードとすれば

$\mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \neg\mu_A(x)$ も凸である.

[性質3] 凸fuzzyグレードに対しては分配律が成立する†.

$$\mu_A(x) \wedge (\mu_B(x) \vee \mu_C(x)) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) \vee (\mu_A(x) \wedge \mu_C(x)),$$

$$\mu_A(x) \vee (\mu_B(x) \wedge \mu_C(x)) = (\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_C(x)).$$

《定理2》凸fuzzyグレードは$\vee$, $\wedge$の下で半環(詳しくは単位元をもつ可換半環)をなす.

(証明) $\vee$, $\wedge$に関して分配的であり, また$\vee$, $\wedge$の下で単位元をもつ可換半群をなす. 単位元は, $\vee$の下では$1/0\ (=0)$, $\wedge$の下では$1/1\ (=1)$である. なお,凸fuzzyグレード$\phi = \sum_i 0/u_i$, $u_i \in [0,1]$, は$\vee$, $\wedge$に対する零元となる.

[性質4] $\mu_A(x), \mu_B(x)$ を正規fuzzyグレードとすれば

$\mu_A(x) \vee \mu_B(x), \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \neg\mu_A(x)$ も正規である.

[性質5] 正規fuzzyグレードに対しては定数演算の法則の他方, すなわち

$$\mu_A(x) \vee 1 = 1, \quad \mu_A(x) \wedge 0 = 0$$

が成立する.

[性質6] 正規凸fuzzyグレードに対しては吸収律が成立する.

---

† $\mu_A(x)$ は凸である必要はあるが, $\mu_B(x), \mu_C(x)$ は必ずしも凸でなくても分配律は成立する.

《定理3》正規凸fuzzyグレードは∨，∧の下で分配束をなす．ただし，最大元＝$1/1$，最小元＝$1/0$である（例参照）．

（例）$J=\{0, 0.5, 1\}$におけるfuzzyグレードを

$$A_i = a_1/0 + a_2/0.5 + a_3/1, \quad i=1, 2, \cdots, 27$$

とする．ただし$a_1, a_2, a_3 \in \{0, 0.5, 1\}$とする．各fuzzyグレード$A_i(i=1,\cdots,27)$は表1のように表わされているものとし，また，このうち正規凸fuzzyグレードをⒶⓘと記すことにすると，正規凸fuzzyグレードⒶⓘの全体は図1のような分配束をなす．

表1. Fuzzyグレード$A_i = a_1/0 + a_2/0.5 + a_3/1$
（Ⓐⓘは正規凸fuzzyグレード）

	fuzzyグレード	a_1 a_2 a_3			
	A_1	0 0 0	Ⓐ$_{15}$	1 .5 .5	
	A_2	.5 0 0	Ⓐ$_{16}$	0 1 .5	
最小元⇒	Ⓐ$_3$	1 0 0	Ⓐ$_{17}$	.5 1 .5	
	A_4	0 .5 0	Ⓐ$_{18}$	1 1 .5	
	A_5	.5 .5 0	Ⓐ$_{19}$	0 0 1	⇐最大元
	Ⓐ$_6$	1 .5 0	A_{20}	.5 0 1	
	Ⓐ$_7$	0 1 0	A_{21}	1 0 1	
	Ⓐ$_8$	.5 1 0	Ⓐ$_{22}$	0 .5 1	
	Ⓐ$_9$	1 1 0	Ⓐ$_{23}$	.5 .5 1	
	A_{10}	0 0 .5	A_{24}	1 .5 1	
	A_{11}	.5 0 .5	Ⓐ$_{25}$	0 1 1	
	A_{12}	1 0 .5	Ⓐ$_{26}$	.5 1 1	
	A_{13}	0 .5 .5	Ⓐ$_{27}$	1 1 1	
	A_{14}	.5 .5 .5			

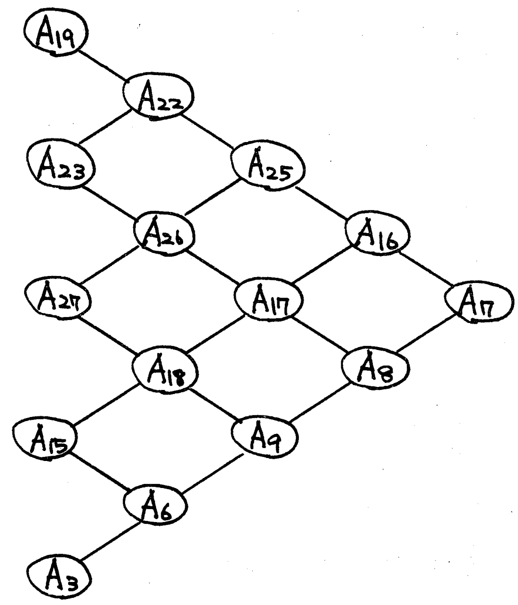

図1. 正規凸fuzzyグレードⒶⓘによる分配束

各種のfuzzyグレードに対する各法則の成立，不成立をまとめてみると表2のようになる．ここで，○は成立を表わし，×は一般には不成立であることを示す．また，△は一部不成立であることを表わす（すなわち，定数演算の法則のうち $\mu_A(x) \vee 1 \neq 1$，$\mu_A(x) \wedge 0 \neq 0$ となることを表わす）．なお通常のfuzzy集合に対するグレード，および通常の集合に対する特性関数値（すなわち，2値グレード（0，1のみをとる））も対比のために付加しておく．

表2．各種fuzzyグレードに対する法則の成立，不成立
（○：成立，×：一般には成立せず，△：一部成立）

グレード ＼ 法則	巾等	交換	結合	吸収	分配	二重否定	ド・モルガン	定数演算	相補
任意のfuzzyグレード	○	○	○	×	×	○	○	△	×
正規fuzzyグレード	○	○	○	×	×	○	○	○	×
凸fuzzyグレード	○	○	○	×	○	○	○	△	×
正規凸fuzzyグレード	○	○	○	○	○	○	○	○	×
グレード（通常のfuzzy集合に対する）	○	○	○	○	○	○	○	○	×
2値グレード（通常の集合に対する）	○	○	○	○	○	○	○	○	○

2. Fuzzy-Fuzzy オートマトン

アルファベットΣにおける<u>fuzzy-fuzzy オートマトン</u> A とは

$$A = (S, S_0, \mu_A, F). \qquad (13)$$

(1) S は状態集合.

(2) S_0は<u>初期fuzzy状態</u>で

$$\mu_{S_0} : S \to [0, 1]^{[0,1]} \qquad (14)$$

なるfuzzyメンバーシップ関数μ_{S_0}で特性づけられた状態集合Sにおけるfuzzy-fuzzy集合である.

(3) μ_A はfuzzy状態推移関数で

$$\mu_A(s_{i+1}/s_i, a_i) \in [0,1]^{[0,1]}, \quad s_{i+1}, s_i \in S, a_i \in \Sigma \qquad (15)$$

なる条件付fuzzyメンバーシップ関数で表わされる†. これは状態s_i, 入力a_iが与えられた時に, 次の状態s_{i+1}に対するfuzzyグレードを与える.

(4) $F \subseteq S$は最終状態の集合.

---

† 一般に, Y におけるfuzzy-fuzzy集合$B(x)$がパラメタ$x \in X$によって条件付けられている場合, $\mu_B(y/x)$なる<u>条件付fuzzyメンバーシップ関数</u>で表わされる. A を X におけるfuzzy-fuzzy集合とすると, A は$\mu_B(y/x)$によりYにおけるfuzzy-fuzzy集合Bを引き起こし, 次の様に定義される.

$$\mu_B(y) = \bigvee_{x \in X} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y/x)].$$

（参考）μ_{S_0}, μ_A が 凸 fuzzy グレードを取る場合，fuzzy-fuzzy オートマトン A は半環オートマトン(7) となり，μ_{S_0}, μ_A が正規凸 fuzzy グレードを取る時，A は束オートマトン(7) となる．さらに $\mu_A, \mu_{S_0} \in [0, 1]$ の時，A は通常の fuzzy オートマトンとなる．

次に，fuzzy-fuzzy オートマトン A の状態方程式を求めよう．今，初期 fuzzy 状態が S_0 で，入力が $a_0 \in \Sigma$ の時，次の fuzzy 状態 S_1 は p.7 の脚注の式より

$$\mu_{S_1}(s_1) = \bigvee_{s_0 \in S} [\, \mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_1/s_0, a_0)]$$

と与えられる．ここで演算 $\vee, \wedge$ は式(10),(11)で与えられる．

よって一般に，初期 fuzzy 状態 S_0 で，入力系列 $x = a_0 a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ が与えられた時の fuzzy 状態 S_{n+1} は

$$\mu_{S_{n+1}}(s_{n+1}) = \tag{15}$$
$$\bigvee_{s_0, s_1, \cdots, s_n \in S} [\, \mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_1/s_0, a_0) \wedge \mu_A(s_2/s_1, a_1) \wedge \cdots \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_n, a_n)].$$

と与えられる．これより

$$\mu_A(s_{n+1}/s_0, a_0 a_1 \cdots a_n) \triangleq$$
$$\bigvee_{s_1, \cdots, s_n \in S} [\mu_A(s_1/s_0, a_0) \wedge \mu_A(s_2/s_1, a_1) \wedge \cdots \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_n, a_n)] \tag{16}$$

と置き直すと，式(15)は簡単につぎのように表わせる．

$$\mu_{S_{n+1}}(s_{n+1}) = \bigvee_{s_0 \in S} [\, \mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s_{n+1}/s_0, a_0 a_1 \cdots a_n)]. \tag{17}$$

これより，fuzzy 状態 S_{n+1} は初期 fuzzy 状態 S_0 と，入力 $x = a_0 a_1 \cdots a_n$ によって表わされることから，式(17)を

$$rp_A(s/S_0, x) = \bigvee_{s_0 \in S} [\mu_{S_0}(s_0) \wedge \mu_A(s/s_0, x)] \tag{18}$$

と表わす(応答を表わしている).

これより入力系列 $x \in \Sigma^*$ が fuzzy-fuzzy オートマトン A によって受理されるグレードを

$$f_A(x) = \bigvee_{s \in F} rp_A(s/s_0, x) \qquad (19)$$

と定義し, $f_A(x)$ によって特性づけられた Σ^* 上の fuzzy-fuzzy 集合を L(A) と記し, fuzzy-fuzzy 言語と名付ける.

次に, fuzzy-fuzzy オートマトン(簡単に ffa)によって特性づけられた fuzzy-fuzzy 言語の閉包性を議論しよう.

《定理4》 ffa A_1, A_2 による fuzzy-fuzzy 言語を $L(A_1)$, $L(A_2)$ とすると

$$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2) \qquad (20)$$

となる ffa A が存在する.

(証明) $A_1 = (S^1, S_0^1, \mu_{A_1}, F^1)$, $A_2 = (S^2, S_0^2, \mu_{A_2}, F^2)$ に対して, $A = (S, S_0, \mu_A, F)$ とする. ここで, $S = S^1 \cup S^2$, $F = F^1 \cup F^2$ とし, μ_{S_0}, μ_A は以下の様に与えられる.

$$\mu_{S_0}(s) = \begin{cases} \mu_{S_0^1}(s) & \cdots \ s \in S^1, \\ \mu_{S_0^2}(s) & \cdots \ s \in S^2. \end{cases}$$

$$\mu_A(s'/s, a) = \begin{cases} \mu_{A_1}(s'/s, a) & \cdots \ s', s \in S^1, \\ \mu_{A_2}(s'/s, a) & \cdots \ s', s \in S^2, \\ 1/0 & \cdots \ \text{その他の場合}. \end{cases}$$

《定理5》 $L(A)=L(A_1)\cap L(A_2)$. (2.1)

(証明) $S=S^1\times S^2$, $F=F^1\times F^2$ とし,

$$\mu_{S_0}(s_1,s_2)=\mu_{S_0^1}(s_1)\wedge\mu_{S_0^2}(s_2).$$

$$\mu_A((s_1',s_2')/(s_1,s_2),a)=\mu_A(s'/s_1,a)\wedge\mu_A(s_2'/s_2,a).$$

《定理6》 $L(A)=L(A_1)*L(A_2)$. (連接†) (2.2)

(証明) $S=S^1\cup S^2$, $F=F^2$, $\mu_i=\bigvee_{s\in S^i}\mu_{S_0^i}(s)$, $i=1,2$, に対し

$$\mu_{S_0}(s)=\begin{cases}\mu_{S_0^1}(s)\wedge\mu_2 & \cdots s\in S^1,\\ \mu_{S_0^2}(s)\wedge\mu_1 & \cdots s\in S^2.\end{cases}$$

$$\mu_A(s'/s,a)=\begin{cases}\mu_{A_1}(s'/s,a) & \cdots s,s'\in S^1,\\ \mu_{A_2}(s'/s,a) & \cdots s,s'\in S^2,\\ \mu_{S_2}(s') & \cdots s\in S^1,\ s'\in S^2,\\ 1/0 & \cdots \text{その他の場合}.\end{cases}$$

《定理7》 $L(A)=L(A_1)^*$ (Kleene閉包) (2.3)

(証明) $S=S^1$, $F=F^1$, $S_0=S_0^1$ であり

$$\mu_A(s'/s,a)=\mu_{A_1}(s'/s,a)\vee\mu_{S_0^1}(s').$$

《定理8》 ffa による fuzzy-fuzzy 言語は補集合の下で閉じていない.

(証明) $L(A,\lambda)=\{x\mid\mu_A(x)\geqq\lambda\}$ と定義すると, もし $\lambda_1\leqq\lambda_2$

---

† L_1, L_2 を fuzzy-fuzzy 言語とすると

連接: $L_1*L_2 \Leftrightarrow \mu_{L_1*L_2}(x)=\bigvee_u[\mu_{L_1}(u)\wedge\mu_{L_2}(v)]$, $x=uv$.

Kleen閉包: $L^*=\{\varepsilon\}\cup L\cup L*L\cup L*L*L\cup\cdots$.

ならば，$L(A,\lambda_1) \geq L(A,\lambda_2)$ となり，$L(A,\cdot)$ は非増加関数となる．一方，$\overline{L(A,\cdot)}$ は非減少となることより証明される．順序関係$\dot{\geq}$は定理2参照．$\geqq$についても同様である．

《定理9》しきい値λをもつ言語を

$$L(A,\lambda)=\{x \mid f_A(x) \dot{\geq} \lambda\},\ \lambda \in [0,1]^{[0,1]} \qquad (24)$$

とすると，$L(A,\lambda)$は正規言語である．$\geqq$についても同様である．さらに式(14)，(15)のμ_{S_0}，μ_Aが正規凸fuzzyグレードの場合も$\dot{\geq} = \geqq$となり同様なことが成立する．

（証明）Σ^*上の関係Rを

$$x R y \iff {}_rp_A(s/S_0, x) = {}_rp_A(s/S_0, y) \qquad (25)$$

と定義すると，RはΣ^*上の同値関係となる．また，任意の$z \in \Sigma^*$に対して

$$\begin{aligned} &{}_rp_A(s/S_0, xz) \\ &= \bigvee_{t \in S} [{}_rp_A(t/S_0, x) \wedge \mu_A(s/t, z)] \\ &= \bigvee_{t \in S} [{}_rp_A(t/S_0, y) \wedge \mu_A(s/t, z)] \\ &= {}_rp_A(s/S_0, yz) \end{aligned}$$

となり，Rは右合同関係となる．さらにRは有限個の同値類をもつことよりいえる．

［参考］fuzzy-fuzzy オートマトンの言語受理能力は通常の決定性オートマトンと同じことから，fuzzy-fuzzy 集合の

概念をタイプ3の形式文法に適用しても同様なことがいえる．しかしながら，タイプ2の文法に適用した場合には言語生成能力は上がる．たとえば，fuzzyプロダクションが

(1) $S \xrightarrow{\alpha} AB$，(2) $S \xrightarrow{\beta} CD$，(3) $A \xrightarrow{\gamma} aAb$，(4) $A \xrightarrow{\gamma} ab$

(5) $B \xrightarrow{\gamma} cB$，(6) $B \xrightarrow{\gamma} c$，(7) $C \xrightarrow{\gamma} aC$，(8) $C \xrightarrow{\gamma} a$

(9) $D \xrightarrow{\gamma} bDc$，(10) $D \xrightarrow{\gamma} bc$．

ただし，α, β, γ はfuzzyグレードで，

$$\alpha = 0.5/0 + 1/0.5 + 0.5/1,$$

$$\beta = 1/0.5,$$

$$\gamma = 1/0.5 + 0.5/1.$$

これより

$$L(G, \gamma) = \{x \mid \mu_G(x) \geq \gamma\} = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

となり，タイプ1言語が生成される．

（注）通常のタイプ2fuzzy文法ではタイプ1言語は生成できないことがわかっている(9)．

参考文献

(1) L.A.Zadeh: "Fuzzy sets", Inform. Control, 8, 338-358, 1965.

(2) W.G.Wee, K.S.Fu: "A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems", IEEE Trans. on SSC, SSC-5, 215-223, 1969.

(3) L.A. Zadeh : "Toward a theory of fuzzy systems", in "Aspects of Network and System Theory" (ed. Kalman and Declaris), Holt, Rinehart and Winston, 1971.

(4) E.S. Santos : "Maximin automata", Inform. Control, 13, 363-377, 1968.

(5) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "Some considerations on fuzzy automata", J. CSS, 3, 409-422, 1969.

(6) E.S. Santos and W.G. Wee : "General formulation of sequential machines", Inform. Control, 12, 5-10, 1968.

(7) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "Various kinds of automata with weights", J. CSS (in press).

(8) L.A. Zadeh : "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning", Inform. Sci. (to appear).

(9) M. Mizumoto, J. Toyoda, K. Tanaka : "N-fold fuzzy grammars", Inform. Sci., 5, 25-43, 1973.